

ANALISIS DINAMIKA MODEL PENYEBARAN PENYAKIT KOLERA

A. FITRIANAH¹, E. KHATIZAH², A. KUSNANTO²

Abstrak

Model matematika penyakit kolera Liao & Wang berbentuk SIR dengan konsentrasi bakteri yang terbagi dua yaitu bakteri yang sangat berbahaya (*hyper infectious*) dan bakteri yang kurang berbahaya (*less infectious*). Model ini menghasilkan dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Analisis kestabilan titik tetap ditentukan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Dengan asumsi total populasi konstan, dinamika populasi pada kondisi titik tetap endemik menunjukkan bahwa peningkatan laju pertumbuhan bakteri akan mempercepat terjadinya wabah penyakit. Kecepatan terjadinya wabah akan lebih besar pada saat laju infeksi bakteri *hyper infectious* meningkat dibandingkan pada saat laju infeksi bakteri *less infectious* meningkat. Di sisi lain, laju kelahiran/kematian populasi manusia yang besar akan memperbesar pula kecepatan terjadinya wabah.

Kata Kunci: model SIR, kolera, kriteria *Routh-Hurwitz*

PENDAHULUAN

Penyakit kolera merupakan penyakit infeksi saluran usus bersifat akut yang disebabkan oleh bakteri *Vibrio cholerae*. Bakteri ini masuk ke dalam tubuh seseorang melalui makanan atau minuman yang terkontaminasi. Bakteri tersebut mengeluarkan enterotoksin pada saluran usus sehingga menimbulkan diare disertai muntah yang akut dan hebat. Akibatnya, seseorang dalam waktu hanya beberapa hari akan kehilangan banyak cairan tubuh dan masuk pada kondisi dehidrasi. Jika dehidrasi tidak segera ditangani, kondisi penderita akan berlanjut ke arah hipovolemik dan asidosis metabolik dalam waktu yang relatif singkat. Kondisi ini dapat menyebabkan kematian bila tidak cepat ditangani. Oleh karena itu, perlu upaya serius agar penyakit kolera ini dapat dicegah ataupun diobati.

Pada tulisan ini, akan dibahas model matematika untuk penyakit kolera yang dilakukan oleh Liao dan Wang [1] dengan model populasi manusia berbentuk SIR dan model konsentrasi bakteri yang terbagi menjadi dua yaitu bakteri yang sangat berbahaya (*hyper infectious*) dan bakteri yang kurang berbahaya (*less infectious*). Dari model tersebut akan dilakukan analisis dinamika populasi terhadap penyakit dengan asumsi total populasi konstan.

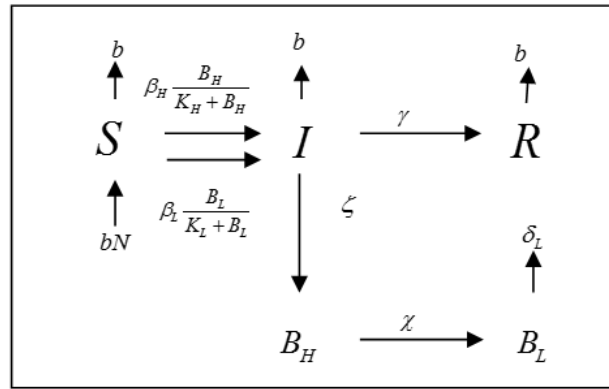
¹ Mahasiswa Program Sarjana, Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

MODEL PERSAMAAN

Berikut ini akan dibahas model matematika kolera SIR (*Susceptible – Infected – Recovered*) dengan konsentrasi bakteri yang terbagi menjadi dua, yaitu B_H (*hyper infectious*) dan B_L (*less infectious*). Total populasi manusia $N(t)$ yang merupakan fungsi dari waktu t dibagi menjadi tiga kelas, yaitu: kelas individu terserang penyakit (*susceptible*) yang dinotasikan dengan $S(t)$, kelas individu yang terinfeksi (*infected*) yang dinotasikan dengan $I(t)$, dan kelas individu yang sembuh (*recovered*) yang dinotasikan dengan $R(t)$, atau dapat juga ditulis: $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Ini menjelaskan bahwa individu yang rentan kemudian terinfeksi masih bisa disembuhkan kembali dan tidak lagi rentan terhadap penyakit.

Pembentukan model matematika penyakit kolera tersebut didasarkan pada diagram kompartemen pada Gambar 1.



Gambar 1 Diagram kompartemen model matematika penyakit kolera

Selanjutnya, berdasarkan diagram kompartemen model matematika penyakit kolera dapat dibentuk sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= bN - \beta_L S \frac{B_L}{K_L + B_L} - \beta_H S \frac{B_H}{K_H + B_H} - bS, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta_L S \frac{B_L}{K_L + B_L} + \beta_H S \frac{B_H}{K_H + B_H} - (\gamma + b)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - bR, \\
 \frac{dB_H}{dt} &= \xi I - \chi B_H, \\
 \frac{dB_L}{dt} &= \chi B_H - \delta_L B_L.
 \end{aligned} \tag{2}$$

TITIK TETAP DAN ANALISIS KESTABILAN

Terdapat dua titik tetap yang diperoleh dari sistem (2), yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Titik tetap tanpa penyakit merupakan kondisi ketika semua individu sehat dan tetap sehat tiap waktu atau dapat dikatakan tidak terdapat penyakit. Titik tetap ini diperoleh ketika banyaknya individu yang terinfeksi sama dengan nol ($I = 0$) dan dinotasikan sebagai $A_1(N, 0, 0, 0, 0)$. Titik tetap endemik merupakan kondisi ketika penyakit terdapat di dalam populasi manusia. Titik tetap endemik ini selanjutnya dinotasikan sebagai $A_2(S^*, I^*, R^*, B_H^*, B_L^*)$.

Untuk melakukan analisis kestabilan terhadap titik tetap yang diperoleh, dilakukan pelinearan pada sistem (2) sehingga menghasilkan matriks Jacobi berikut.

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_L B_L}{K_L + B_L} - \frac{\beta_H B_H}{K_H + B_H} & 0 & 0 & -\frac{\beta_H S K_H}{(K_H + B_H)^2} & -\frac{\beta_L S K_L}{(K_L + B_L)^2} \\ \frac{\beta_L B_L}{K_L + B_L} + \frac{\beta_H B_H}{K_H + B_H} & -(\gamma + b) & 0 & \frac{\beta_H S K_H}{(K_H + B_H)^2} & \frac{\beta_L S K_L}{(K_L + B_L)^2} \\ 0 & \gamma & -b & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & -\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi & -\delta_L \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobi yang dihasilkan dari pelinearan pada titik tetap A_1 memberikan nilai eigen yang akan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$\left[\lambda^3 + \lambda^2 (\delta_L + \chi + \gamma + b) + \lambda \left(\chi \delta_L + \gamma \delta_L + \gamma \chi + b \delta_L + b \chi - \frac{\beta_H N \xi \delta_L}{K_H} - \frac{\beta_H N \xi \chi}{K_L} \right) \right] (\lambda + b)^2 = 0$$

Titik tetap dengan kondisi stabil akan diperoleh jika akar ciri bernilai negatif, yaitu $\lambda = -b$ dan untuk menganalisis polinomial pangkat tiga, didefinisikan

$$\begin{aligned} b_1 &= \delta_L + \chi + \gamma + b, \\ b_2 &= \chi \delta_L + \gamma \delta_L + \gamma \chi + b \delta_L + b \chi - \frac{\beta_H N \xi}{K_H}, \\ b_3 &= \chi \gamma \delta_L + b \chi \delta_L - \frac{\beta_H N \xi \delta_L}{K_H} - \frac{\beta_L N \xi \chi}{K_L}. \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi *Routh-Hurwitz*, kondisi yang diperlukan agar memenuhi kriteria kestabilan adalah $b_1 > 0$, $b_3 > 0$ dan $b_1 b_2 - b_3 > 0$. Jelas bahwa $b_1 > 0$ karena semua parameter bernilai positif. Untuk $b_3 > 0$ akan diperoleh jika dan hanya jika

$$\left[-\chi(\gamma + b) + \frac{\beta_H N \xi}{K_H} \right] + \frac{\beta_L N \xi \chi}{K_L \delta_L} < 0,$$

dan menghasilkan

$$N < \frac{(\gamma + b)\chi K_H K_L \delta_L}{\xi(\beta_H K_L \delta_L + \beta_L \chi K_H)}.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} b_1 b_2 - b_3 &= (\delta_L + \chi + \gamma + b) \left[\delta_L(\chi + \gamma + b) + \chi(\gamma + b) - \frac{\beta_H N \xi}{K_H} \right] - \\ &\gamma \chi \delta_L - b \chi \delta_L + \frac{\beta_H N \xi \delta_L}{K_H} + \frac{\beta_L N \xi \chi}{K_L} \\ &= (\chi + \gamma + b) \left[\delta_L(\chi + \gamma + b) + \chi(\gamma + b) - \frac{\beta_H N \xi}{K_H} \right] + \frac{\beta_L N \xi \chi}{K_L} \end{aligned}$$

untuk memperlihatkan $b_1 b_2 - b_3 > 0$.

Kondisi $N < \frac{(\gamma + b)\chi K_H K_L \delta_L}{\xi(\beta_H K_L \delta_L + \beta_L \chi K_H)}$ memberikan sebuah ambang batas untuk

total populasi (yang diasumsikan benar-benar rentan pada awalnya), yaitu $S_C = \frac{(\gamma + b)\chi K_H K_L \delta_L}{\xi(\beta_H K_L \delta_L + \beta_L \chi K_H)}$.

Ketika $N < S_C$, titik tetap tanpa penyakit bersifat stabil dan penyebaran penyakit tidak akan terjadi. Sebaliknya, jika $N > S_C$, titik tetap tanpa penyakit menjadi tidak stabil dan penyakit yang memasuki populasi akan bertahan serta menyebabkan epidemik. Selanjutnya diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{N}{S_C} = \frac{N \xi (\beta_H K_L \delta_L + \beta_L \chi K_H)}{(\gamma + b)\chi K_H K_L \delta_L}.$$

Kondisi $N < S_C$ setara dengan $R_0 < 1$.

Melalui langkah yang serupa, titik tetap endemik memberikan nilai eigen yang akan diperoleh dengan menyelesaikan persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} &(\lambda + b) \left[(\lambda + \delta_L)(\lambda + P + b)(\lambda + \gamma + b)(\lambda + \chi) - \xi Q(\lambda + b)(\lambda + \delta_L) - \right. \\ &\left. T \xi \chi(\lambda + b) \right] = 0 \end{aligned}$$

dengan

$$P = \frac{\beta_L B_L^*}{K_L + B_L^*} + \frac{\beta_H B_H^*}{K_H + B_H^*}, Q = \frac{\beta_H S^* K_H}{(K_H + B_H^*)^2}, T = \frac{\beta_L S^* K_L}{(K_L + B_L^*)^2}.$$

Jelas persamaan ini memiliki salah satu akar negatifnya yaitu $\lambda = -b$. Selanjutnya

$$\left[(\lambda + \delta_L)(\lambda + P + b)(\lambda + \gamma + b)(\lambda + \chi) - \xi Q(\lambda + b)(\lambda + \delta_L) - T \xi \chi(\lambda + b) \right]$$

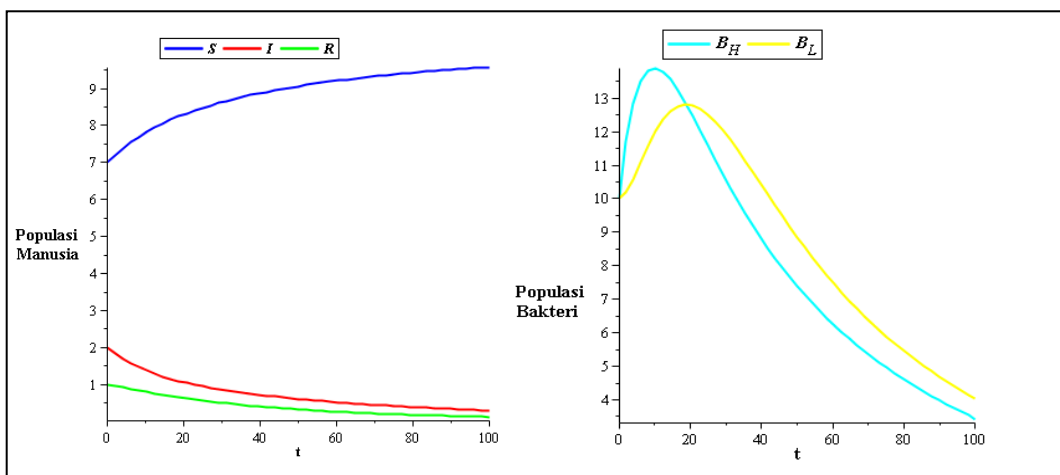
diekspresikan ke dalam bentuk $a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda^1 + a_0 = 0$. Untuk memastikan bahwa semua akar persamaan tersebut memiliki bagian-bagian real negatif, maka menurut kriteria *Routh-Hurwitz*, $a_3 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0, a_1(a_2 a_3 - a_1) > a_0 a_3^2$. Dengan demikian, kondisi stabil pada titik tetap endemik terjadi ketika $N > S_C$ dan $R_0 > 1$.

SIMULASI DINAMIKA POPULASI

Untuk mengamati pengaruh masuknya bakteri ke dalam populasi manusia, diperlukan kurva bidang solusi yang menunjukkan hubungan banyaknya populasi terhadap waktu. Analisis dinamika populasi dilakukan dengan mengubah-ubah nilai β_H , β_L dan b . Dengan demikian, akan didapatkan dua kondisi untuk menganalisis dinamika populasi, yaitu $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. $R_0 < 1$ adalah kondisi ketika penyakit akan hilang dari populasi. $R_0 > 1$ adalah kondisi ketika penyakit bertahan dalam populasi dan menjadi wabah. Nilai untuk setiap parameter yang digunakan, yaitu $N = 10$, $\xi = 1$, $\gamma = 0.01$, $\chi = 0.1$, $\delta_L = 0.1$, dan $K_H = K_L = 100$. Nilai awal untuk setiap variabel yang digunakan, yaitu $S(0) = 7$, $I(0) = 2$, $R(0) = 1$, $B_H(0) = 10$, dan $B_L(0) = 10$.

Dinamika populasi dengan mengubah laju bakteri *hyper infectious* (β_H)

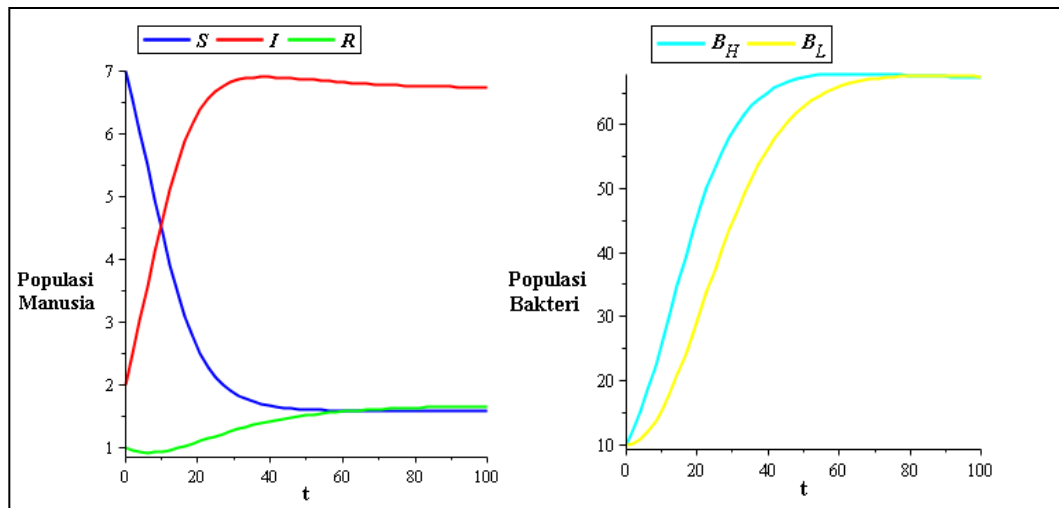
Definisikan bahwa laju infeksi bakteri *hyper infectious* (β_H) adalah laju bakteri *hyper infectious* yang tercerna oleh individu yang rentan terhadap penyakit. Pada kondisi ini, nilai β_H diubah-ubah sedangkan nilai β_L dan nilai b tetap, yaitu $\beta_L = 0.02$ dan $b = 0.04$. Ketika dievaluasi pada nilai $\beta_H = 0.005$ dan $\beta_H = 0.01$ menghasilkan $R_0 < 1$, sedangkan pada nilai $\beta_H = 0.1$ dan $\beta_H = 0.5$ menghasilkan $R_0 > 1$. Ketika $R_0 < 1$, kurva akan stabil menuju titik tetap tanpa penyakit. Ketika $R_0 > 1$, kurva stabil menuju titik tetap endemik.



Gambar 2 Dinamika populasi pada saat $\beta_H = 0.01$

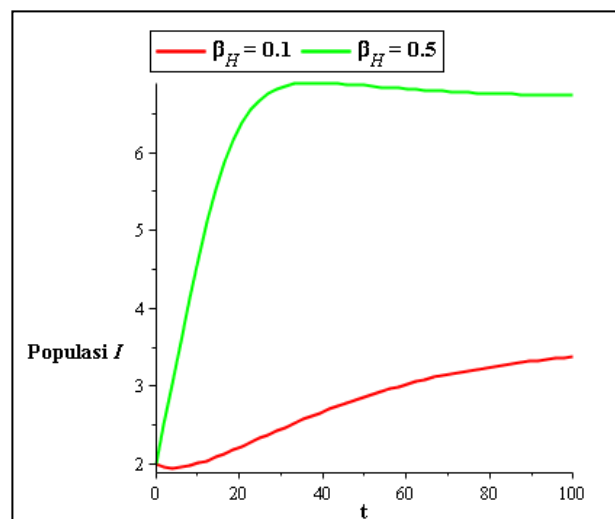
Berdasarkan Gambar 2 kurva S , I , R , B_H , dan B_L menuju titik $(10, 0, 0, 0, 0)$. Kurva I menunjukkan bahwa pada awalnya terdapat individu yang terinfeksi di dalam populasi, namun seiring berjalannya waktu kelompok individu tersebut mengalami penurunan hingga menuju nol. Begitu pula dengan kurva B_H dan B_L . Kedua kurva ini pada awalnya sempat mengalami kenaikan, namun seiring

berjalannya waktu mengalami penurunan hingga menuju nol. Hal tersebut menandakan bahwa keberadaan penyakit mengalami kepunahan seiring berjalannya waktu. Dinamika populasi pada saat $\beta_H = 0.005$ serupa dengan Gambar 2.



Gambar 3 Dinamika populasi pada saat $\beta_H = 0.5$

Pada Gambar 3, yaitu ketika $\beta_H = 0.5$, diperoleh titik tetap endemik (2, 7, 1, 67, 67). Kurva I , B_H , dan B_L yang mengalami peningkatan menandakan bahwa penyakit menetap di dalam populasi.

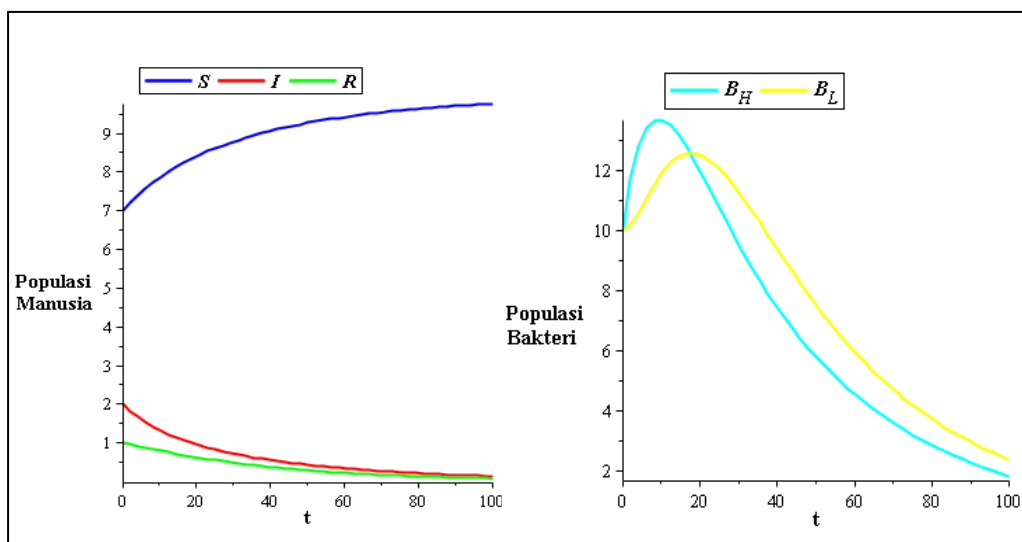


Gambar 4 Perbandingan populasi I ketika $\beta_H = 0.1$ dan $\beta_H = 0.5$

Berdasarkan Gambar 4, ketika nilai β_H ditingkatkan, populasi I mengalami peningkatan pula. Ini berarti bahwa individu yang terinfeksi akan semakin bertambah ketika nilai laju infeksi bakteri *hyper infectious* semakin ditingkatkan. Selain itu, dapat dilihat pula pada bahwa kurva I dengan nilai $\beta_H = 0.5$ lebih cepat menuju kestabilan dibandingkan kurva dengan nilai $\beta_H = 0.1$. Ini berarti bahwa pertambahan laju bakteri *hyper infectious* menyebabkan penyakit semakin cepat menjadi wabah endemik.

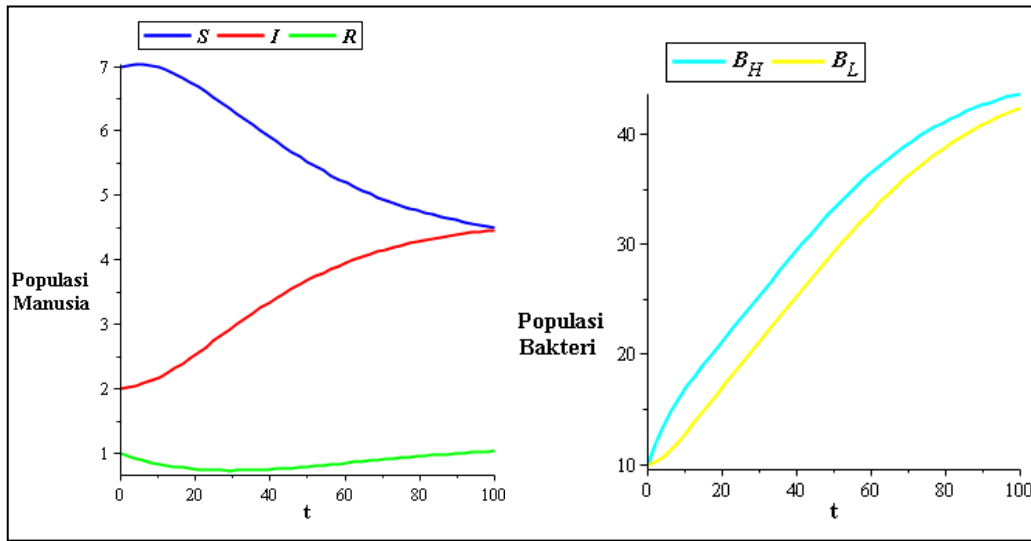
Dinamika populasi dengan mengubah laju bakteri *less infectious* (β_L)

Definisikan bahwa laju bakteri *less infectious* (β_L) adalah laju bakteri *less infectious* yang tercerna oleh individu yang rentan terhadap penyakit. Pada kondisi ini, nilai β_L diubah-ubah sedangkan nilai β_H dan nilai b tetap, yaitu $\beta_H = 0.01$ dan $b = 0.04$. Ketika dievaluasi pada nilai $\beta_L = 0.005$ dan $\beta_L = 0.01$ menghasilkan $R_0 < 1$, sedangkan pada nilai $\beta_L = 0.1$ dan $\beta_L = 0.5$ menghasilkan $R_0 > 1$. Ketika $R_0 < 1$, kurva akan stabil menuju titik tetap tanpa penyakit. Ketika $R_0 > 1$, kurva stabil menuju titik tetap endemik.

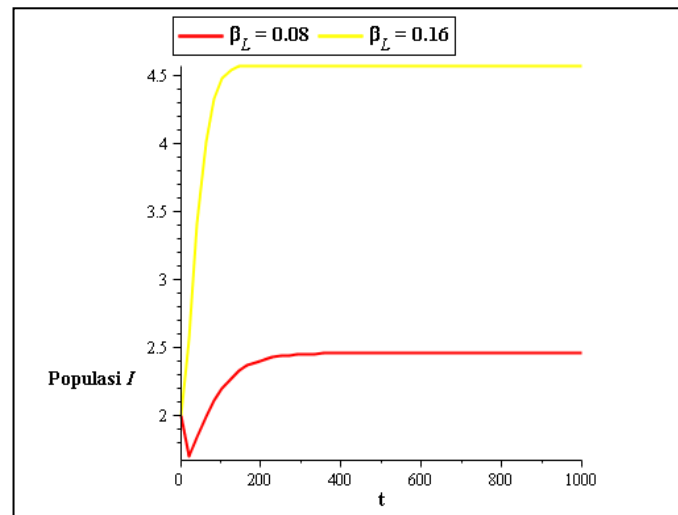


Gambar 5 Dinamika populasi pada saat $\beta_L = 0.01$

Berdasarkan Gambar 5, ketika $\beta_L = 0.01$ kurva S , I , R , B_H , dan B_L mengalami kestabilan di titik tetap tanpa penyakit (10, 0, 0, 0, 0). Hal ini menandakan bahwa penyakit yang pada awalnya terdapat dalam populasi, mengalami kepunahan seiring berjalannya waktu. Dinamika populasi pada saat $\beta_L = 0.005$ serupa dengan Gambar 5.

Gambar 6 Dinamika populasi pada saat $\beta_L = 0.16$

Berdasarkan Gambar 6 kurva S , I , R , B_H , dan B_L stabil menuju titik tetap endemik. Sebagaimana ketika nilai β_H ditingkatkan, kurva I semakin meningkat ketika nilai β_L ditingkatkan. Artinya, individu yang terinfeksi akan semakin meningkat ketika nilai β_H dan β_L ditingkatkan. Sebaliknya, kurva S semakin mengalami penurunan ketika nilai β_H dan β_L ditingkatkan. Dinamika populasi pada saat $\beta_L = 0.08$ serupa dengan Gambar 6.

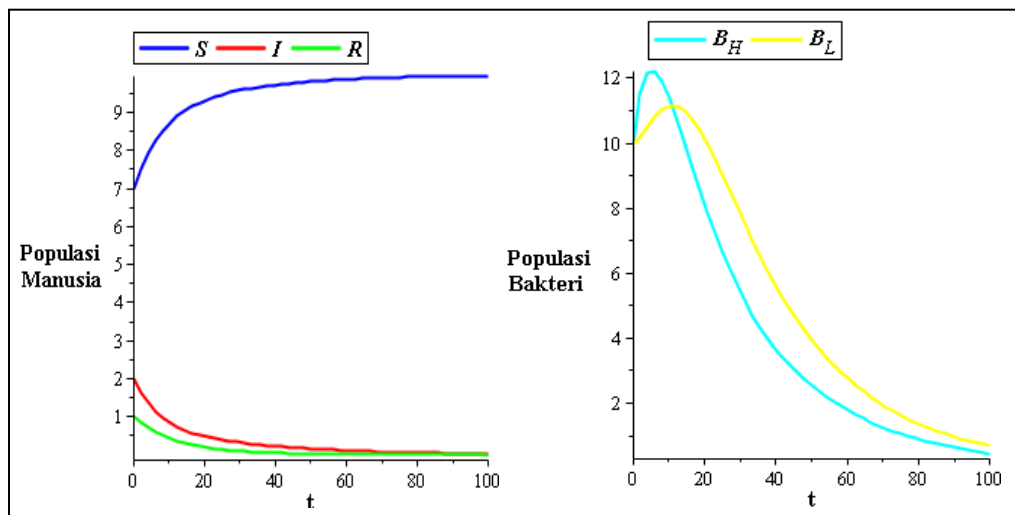
Gambar 7 Perbandingan populasi I ketika $\beta_L = 0.08$ dan $\beta_L = 0.16$

Berdasarkan Gambar 7, ketika nilai β_L ditingkatkan dari $\beta_L = 0.08$ menjadi $\beta_L = 0.16$, populasi I semakin mengalami peningkatan. Ini berarti bahwa individu yang terinfeksi akan semakin bertambah ketika nilai laju bakteri *less infectious*

semakin ditingkatkan. Selain itu, dapat dilihat pula bahwa kurva dengan nilai $\beta_L = 0.16$ lebih cepat menuju kestabilan dibandingkan kurva dengan nilai $\beta_L = 0.08$. Ini berarti bahwa pertambahan laju bakteri *less infectious* menyebabkan penyakit semakin cepat menjadi wabah endemik. Adapun dari sisi waktu, berdasarkan Gambar 4 dan Gambar 7, kecepatan terjadinya wabah akan lebih besar pada saat peningkatan laju pertumbuhan bakteri *high infectious* dibandingkan pada saat peningkatan laju bakteri *less infectious*.

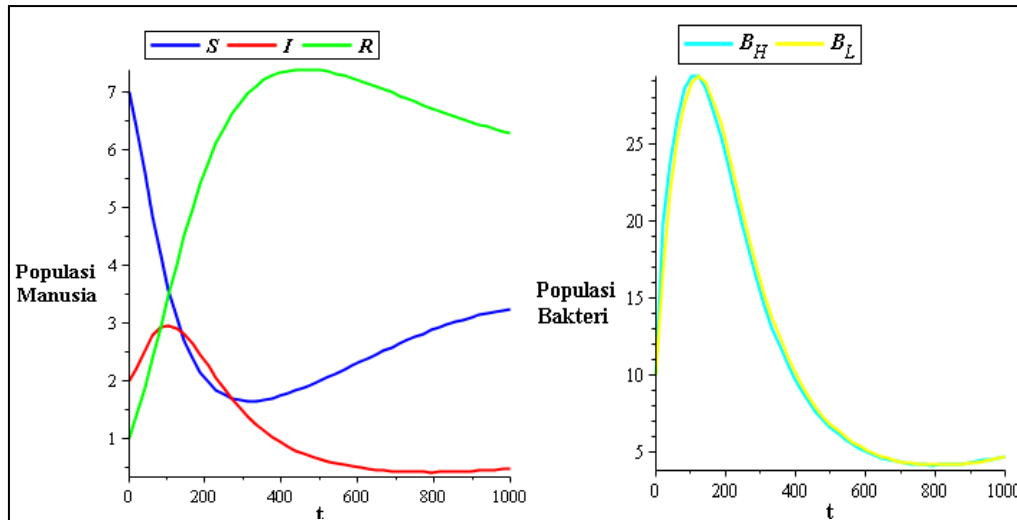
Dinamika populasi dengan mengubah laju kelahiran/kematian manusia

Pada kondisi ini, nilai b diubah-ubah sedangkan nilai β_H dan nilai β_L tetap, yaitu $\beta_H = 0.02$ dan $\beta_L = 0.02$. Ketika dievaluasi pada nilai $b = 0.1$ dan $b = 0.05$ menghasilkan $R_0 < 1$ yang artinya bahwa kurva akan stabil menuju titik tetap tanpa penyakit. Sebaliknya, ketika dievaluasi pada nilai $b = 0.01$ dan $b = 0.001$ menghasilkan $R_0 > 1$ yang artinya bahwa kurva akan stabil menuju titik tetap endemik.

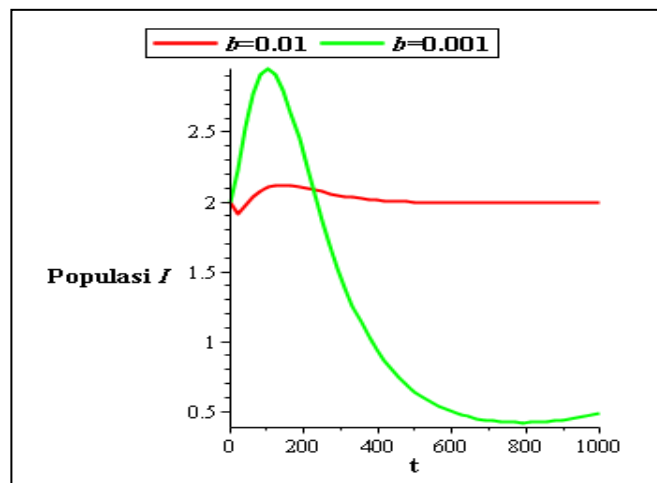


Gambar 8 Dinamika populasi pada saat $b = 0.1$

Berdasarkan Gambar 8, kurva S , I , R , B_H , dan B_L menuju kestabilan di titik tetap tanpa penyakit, yaitu $(10, 0, 0, 0, 0)$. Kurva I dan kurva R mengalami penurunan hingga menuju nol, sedangkan kurva S mengalami peningkatan. Kurva B_H dan B_L yang menunjukkan banyaknya populasi bakteri, mengalami penurunan yang cukup signifikan hingga menuju nol meskipun sebelumnya sempat mengalami peningkatan dalam jangka waktu tertentu. Hal ini menandakan bahwa penyakit yang sempat ada dalam populasi akan menghilang.

Gambar 9 Dinamika populasi pada saat $b = 0.001$

Berdasarkan Gambar 9, kurva S , I , R , B_H , dan B_L stabil menuju titik tetap endemik (3, 1, 6, 6, 6). Kurva S mengalami penurunan yang cukup signifikan, sedangkan kurva R mengalami peningkatan. Kurva I mengalami peningkatan hingga jangka waktu tertentu kemudian mengalami penurunan. Ketiga kurva tersebut akhirnya menuju titik tetap endemik meskipun sempat mengalami ketidakstabilan. Hal berarti bahwa penyakit menetap dalam populasi dan menjadi wabah.

Gambar 10 Perbandingan populasi I ketika $b = 0.01$ dan $b = 0.001$

Berdasarkan Gambar 10, ketika dievaluasi pada nilai $b = 0.01$, kurva I sempat mengalami peningkatan kemudian turun hingga stabil menuju titik tetap endemik. Ketika dievaluasi pada nilai $b = 0.001$, kurva mengalami peningkatan yang cukup tinggi kemudian mengalami penurunan drastis dan menuju titik tetap

endemik. Meskipun mengalami dinamika yang hampir sama, kurva lebih cepat mencapai kestabilan menuju titik tetap endemiknya ketika $b = 0.01$, dibandingkan ketika $b = 0.001$. Ini berarti bahwa ketika laju kelahiran/kematian diperbesar, penyakit akan lebih cepat mewabah dan menetap dalam populasi hingga jangka waktu tertentu.

SIMPULAN

Dalam artikel ini telah dipelajari model matematika penyebaran penyakit kolera, $SIR-B_H B_L$. Model tersebut menghasilkan dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Analisis kestabilan kedua titik tetap ini diperoleh menggunakan kondisi *Routh-Hurwitz* yang menghasilkan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Titik tetap tanpa penyakit berada dalam kestabilan ketika R_0 kurang dari satu dan titik tetap endemik berada dalam kestabilan ketika R_0 lebih dari satu.

Simulasi dinamika populasi dilakukan dengan mengubah nilai laju bakteri *hyper infectious*, laju bakteri *less infectious* dan laju kelahiran/kematian manusia. Laju bakteri yang dimaksud disini adalah laju bakteri yang tercerna oleh individu yang rentan terhadap penyakit. Selanjutnya, diperoleh bahwa peningkatan laju bakteri *hyper infectious* menyebabkan penyakit semakin cepat menjadi wabah endemik. Demikian pula konsekuensi yang terjadi ketika laju bakteri *less infectious* meningkat. Jika dilihat dari sisi waktu, kecepatan terjadinya wabah akan lebih besar pada saat peningkatan laju bakteri *high infectious* dibandingkan pada saat peningkatan laju bakteri *less infectious*. Disimpulkan pula bahwa ketika laju kelahiran/kematian manusia diperbesar, penyakit akan lebih cepat mewabah dan menetap dalam populasi hingga jangka waktu tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Liao S, Wang J. 2011. Stability analysis and application of a mathematical cholera model (*Mathematical Biosciences and Engineering*). 8(3):733-752.
- [2] Verhulst F. 1990. *Nonlinear Differential Equation and Dynamical System*. Heidelberg (DE): Springer-Verlag.

